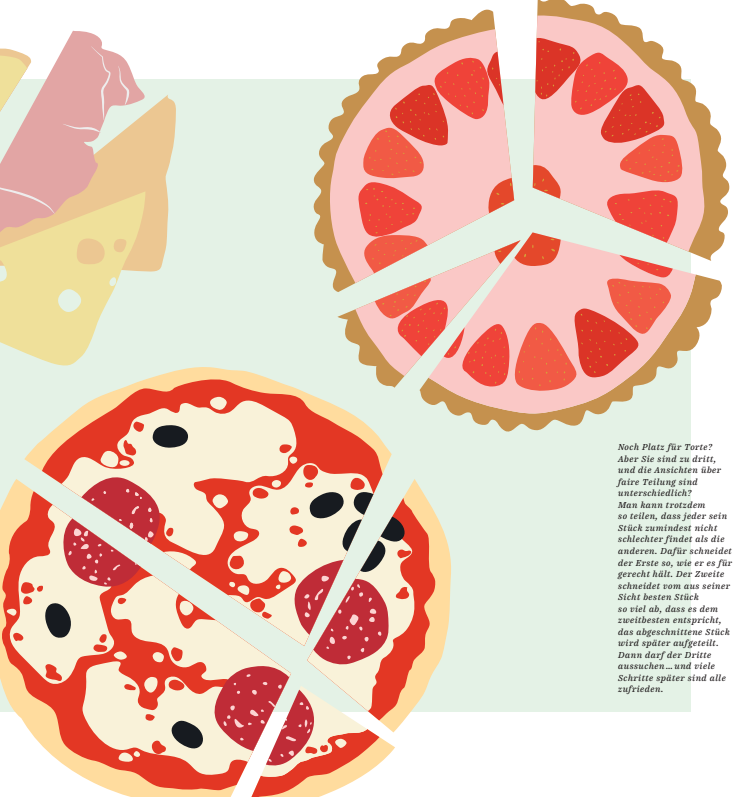




Das „Pizza-Theorem“ funktioniert so: Man teilt eine kreisrunde Pizza mit (mindestens) vier geraden Schnitten, die sich in einem beliebigen Punkt treffen. Wenn man die acht unterschiedlich großen Teile abwechselnd an zwei Esser verteilt, bekommt jeder gleich viel Pizza. Wer es nicht glaubt, kann die hier gezeigten Teilstücke vergleichen: Zu jedem Stück mit einem Großbrotstücken für Esser 1 passt eines mit dem entsprechenden Kleinbrotstücken, das Esser 2 erhält. Wenn einer jedoch keinen Rand will, bietet sich eher eine Teilung wie unten an.

Das „Ham Sandwich Theorem“ besagt, dass man mit nur einer Schnittebene drei Objekte in je zwei gleich große Teile schneiden kann – etwa Brot, Schinken und Käse, auch wenn diese ganz asymmetrisch sind oder Löcher haben. Daraus folgt, unter anderem: Mit zwei Schnitten kann man eine Pizza so teilen, dass jeder gleich viel Teig, Salami, Käse und Oliven bekommt.



Noch Platz für Torte?
Aber Sie sind zu dritt, und die Ansichten über faire Teilung sind unterschiedlich?
Man kann trotzdem so teilen, dass jeder sein Stück zumindest nicht schlechter findet als die anderen. Dafür schneiden der Erste so, wie er es für gerecht hält. Der Zweite schneidet vom aus seiner Sicht besten Stück so viel ab, dass es dem zweitbesten entspricht, das abgeschnittene Stück wird später aufgeteilt. Dann darf der Dritte aussuchen... und viele Schritte später sind alle zufrieden.

So ist es
gerecht.
Oder?

Schon mal beim Teilen die Pizza-Hälfte
mit weniger Salami erwischt?
Das kleinste Kuchenstück?
Die dünne Seite vom Käsebro? Skandal!
Mit diesen Tricks aus der Mathematik
ist man für immer auf der sicheren Seite.
Und vielleicht könnten sie sogar
die Welt etwas fairer machen.

Text: Christian J. Meier
Illustration: Olivia von Pilgrim

Oft scheint Gerechtigkeit unklar. Wie soll man etwa Omas Goldring unter drei Erben aufteilen? Oder eine Pizza, wenn einer den Rand liebt, der andere das Innere? Dabei bietet die Mathematik etliche Verfahren, die ein exakt gerechtes Aufteilen ermöglichen, selbst wenn es utopisch scheint. Und Forscher arbeiten daran, diese Methoden praktikabel zu machen.

Für ein verliebtes Paar, das beim Pizzaessen die Romantik bewahren will, scheint die Sache einfach: Einer teilt, der andere wählt. Der Teilende wird versuchen, die Pizza genau zu halbieren. Doch den Mittelpunkt per Schnitt exakt zu treffen ist schwer. In der Realität verfehlt die Klinge den Punkt immer. Und wenn man sich Augenmaß, kann er das größere Stück nehmen, Romantik schwind und gut, aber Pizza geht vor.

Was aber, wenn der Teilende den Mittelpunkt verfehlt, vielleicht sogar drastisch, aus Liebeskummer: Pech gehabt? Aber die Mathematik hat für solche Fälle eine Lösung, die auch bei gierigen Partnern Übervorteilung verhindert. Man braucht dann allerdings, wenn es schon nicht mit dem Mittelpunkt klappt, ein umso besseres Auge für Winkel, oder ein Geodreieck in der Tasche. Dann zieht man drei weitere gerade Schnitte so durch die Pizza, dass die Schnittlinien alle in einem Punkt und in

Das sogenannte Pappia-Theorem, 1967 vorgeschlagen von Lj Upton, 1968 erstmals bewiesen von Michael Goldberg, garantiert: Egal wie sich die Linien treffen, der Mittelpunkt des Kreises am Rand ist die Pappia gerecht geteilt, wenn die beiden Eisen je nach jedes zweite Stück nehmen. Wenn nicht durch die Mitte geschnitten wurde, gleich keines dem anderen, doch die je vier Stücke addieren sich exakt zur Hälfte. Und das gilt auch für den oft unbeliebten Rand: Beide Eisen erhalten genau gleich viel davon. Voraussetzung ist allerdings, dass die Pappia kreisförmig ist.

Das Ganze funktioniert übrigens auch, wenn man die Pappia nicht in acht Teile schneidet, sondern sich für zwölf, 16 oder ein anderes Vielfaches von vier entscheidet – nur weniger als acht dürfen es nicht sein.

Einen weiteren, eleganten Beweis des Pizza-Theorems fanden Larry Carter und

Stan Wagon 1994: Sie zerlegten jedes der acht Stücke weiter, aber so, dass Paare von deckungsgleichen, oder im Mathematiker-Jargon „kongruenten“, Stücken entstehen. In ihrem „Beweis ohne Worte“ fällt jeweils ein Partner des kongruenten Paares dem einen Esser zu, der andere dem anderen (Abbildung oben links).

„Das Pizza-Theorem ist so faszinierend, weil niemand damit rechnet“, sagt Hans Humenberger von der Universität Wien. Und es lässt sich sogar noch verallgemeinern, etwa auf drei Esser: Man schneidet in 30-Grad-Winkeln zwölf Teile, jedes Esser bekommt jedes dritte Teil, und alle gleich viel.

Aber was, wenn die Esser mäßig sind und einer gar keinen Rand will, der andere besonders viel? Oder wenn sie die Mathematik nicht trauen und bezweifeln, dass unterschiedlich geformte Stücke sich wirklich zu einem fairen Anteil summieren? Für solche Fälle fanden Joel Haddley und Stephen Worsley von der University of Liverpool die Lösung, sie ist gleichzeitig dekorativ und nützlich. Die beiden Mathematiker fragten sich: Lässt sich eine Scheibe so mit einer einzigen Form „kacheln“, also lückenlos bedecken wie eine geflieste Badzimmerrwand, dass mindestens eine Kachel den Mittelpunkt nicht berührt?

Haddley und Worsley erzeugten die Kacheln durch simple fraktale Operationen. Man nehme zum Beispiel eine Kopie des Pizzakreises, teile ihn in sechs Abschnitte und lege diese Kreishöhen so vom Mittelpunkt zum Rand der Pizza, dass sie einander in der Mitte in 60-Grad-Winkeln treffen. Die Kacheln sind dann als sechs schwungene Pizzakante, und schon ist die Scheibe gekachelt. Zieht man nun von einer Außenseite jeder Kachel eine Linie entlang ihrer Symmetrieachse zur Mitte des gegenüberliegenden Kreishöhen, entstehen zwei spiegelsymmetrische Hälften – eine innen, eine am Rand. Die Pizza ist gleichmäßig geteilt, mit nur einer einzigen (allerdings beidseitig verwendeten) Kachel.

Diese Zerteilung der Pizza beziehungsweise des Kreises war lange bekannt; wie die Autoren erwähnen, sei sie sogar das Logo eines Mathematik-Programms an der Penn State University gewesen. Sie konnten jedoch zeigen: Das Prinzip lässt sich

Erweitert
man das
Pizza-Theorem
auf drei
Dimensionen,
kommt
das Calzone-
Theorem
heraus

verallgemeinern und mit unzähligen Winkeln, Kurven oder gezackten Linien umsetzen. Es entstehen vielfältige Muster, die an exotische Ornamente erinnern. Haddley und Worsley konnten beweisen, dass ihr Rezept unendlich viele Kachelungen ergibt. Diese Erkenntnis ging viral. Dem *New Scientist* sagte Haddley, offenbar überrascht vom medialen Interesse: „Ich habe keine Ahnung, ob unsere Arbeit überhaupt irgendwelche Anwendungsmöglichkeiten jenseits des Pizzaschneides hat.“ Aber immerhin, man könne hübsche Bilder produzieren.

Das war wohl englisches Understatement. Denn die Arbeit zeigte die wichtige Rolle von Symmetrien beim Pizzasteilen eine Erkenntnis, die tief in die Geometrie reicht. In solchen Tiefen ist Richard Ehrenborg von der University of Kentucky zu Hause. Er hat abstrakte Pizzen in mehr Dimensionen durchgeschnitten, als sich der menschliche Geist vorstellen kann.

Erweitert man das Prinzip des Pizzasteilens ins Dreidimensionale, wird aus dem Kreis ein Kugel, aus einer Linie ein

den Kreis einer Kugel, aus Linien werden Ebenen, und aus dem Pizzatheorem das „Calzone-Theorem“ – manche Leute haben offenbar noch nie ein korrekt geformtes Calzone gesehen. Wählt man in der Kugel einen beliebigen Punkt, zieht durch den Punkt eine Linie und durch die Linie vier Ebenen, die sich entlang der Linie schneiden, plus eine Ebene, die senkrecht zur Linie durch P geht, wird die Kugel in 16 Stücke zerteilt. Teilt man diese wieder abwechselnd auf zwei Esser auf, erhält jeder das gleiche Volumen.

Analogie funktioniert das für beliebige Dimensionen, auch wenn das Vorstellungsvermögen versagt. Mehrdimensionale Hyperwürfel sind für uns nicht mehr als abstrakter Raum in immer mehr Kammern. Elizabeth Barlow und seine Kolleginnen Sophie Morel und Margaret Ready zeigten 2002: Auch in diesen höheren Dimensionen gilt das Pizza-Theorem, wenn man jeweils benachbarte Stücke nimmt.

Aber was heißt eigentlich „fair“ teilen? Was, wenn mehrere Salamischeiben unregelmäßig auf der Pizza liegen, und nicht nur der Teig, sondern auch die Wurst gerecht geteilt werden soll? Dann geht es um die Frage, ob man die Pizza in eine bestimmte Sache, sondern mehrerer gleichzeitig, die Situation scheint komplex. Mas man also komplizierte Schnittmuster wählen

Die Mathematik vereint: Ein Schnitt reicht. Plausibel macht das eine einfache Beobachtung: Man setze das Messer so an, dass der Pizzateig gerecht in zwei Hälften geteilt wird. Das geht übrigens auch bei einer etwas unregelmäßigen Pizza, sie muss nicht rund sein. Wie viel Wurst liegt jetzt links von der Messer? Sag mir, wieviel als die Hälfte, 40 Prozent zum Beispiel; andernfalls können wir auch die rechte Seite nehmen. Jetzt dreht man das Messer kontinuierlich im Uhrzeigersinn, so dass es der Teig immer weiter sauber halbiert wird. Nach 180 Grad Drehung ist man wieder beim Ausgangsschnitt angekommen, nur dass das Messer in die andere Richtung

Links vom Messer befindet sich jetzt genau der andere Teil der Wurst, also 60 Prozent. Irgendwann darzwischen muss man demnach bei der 50-Prozent-Wurst-Marke vorbeigekommen sein, schließlich hat das Messer keine Sprünge gemacht. Wenn man die Rechte findet und dort einschneidet, hat man Teig und Wurst mit nur einem Schnitt gerecht geteilt.

Das funktioniert auch mit noch viel allgemeineren Verteilungen von Dingen, was verblüffende Konsequenzen hat. Zum Beispiel lässt sich durch eine Deutschlandkarte eine gerade Linie ziehen, sodass die beiden Teile des Landes je die Hälfte aller Alpengipfel über 2000 Meter und die Hälfte aller Kirchtürme enthalten. Und das funktioniert analog. Ein Planetaire Riesensystemkatalog. Ein Planet so halbieren, dass sich auf beiden Seiten je die Hälfte aller Wolkentracker, Bierleite und Wombats be-

findet. Denn, sehr praktisch: Man kann stets so viele Objektgruppen aufteilen, wie der betrachtete Raum Dimensionen hat. Und das ist die Idee der *Schottischen* Topologie nach Kasan. Man nennt es Ham-Sandwich-Theorem. Ein Schinken-Sandwich ist schließlich dreidimensional und hat drei Elemente, nämlich Brot, Schinken, noch mal Brot (oder, in anderen Varianten, Brot, Butter, noch mal Brot). Und das heißt: dass alle drei, und seien sie noch so asymmetrisch, mit nur einem Schnitt halbiert werden können (Abbildung oben, *Mitte*). Es stammt aus dem legendären „Schottischen Buch“, eine Sammlung von Problemen des 17. Jahrhunderts, die im 19. Jahrhundert in der Dreißigerjahren in „Schottischen Café“ in Lemberg, dem heute ukrainischen Lwów, erstellte.

Das Thema
ist aktuell
sehr relevant:
Denn wie bring
man
KI-Systemen
bei, faire
Entscheidungen
zu treffen?

Luis
der ETH
Theore
Zustate
ven und
ge Schri
ren kan
doch ze
reichen
rechts),
auch p
konnte
dass di
sie im k
za kalt
ein offe

Ihn f
orem, s
tiker vo
schäftu
mit de
Schnitt
tiert nu
selbst i
sein, w
Dimens
sucht n
Problem
Doch di
sagt Mi
Theore
gen, ob
Das s
kerai k
che Alg
bische
von der
zepte w

nehmen
ren, was
matiken
bedeutsa
sind, wa
im Teile
Das
trachten
Belägen
wa Erd
deren, t
kleinen
le Erd
leicht d
Mathem
Spielbu
entwick
Kuchem
geleien

Barba und Patrick Schneider von Zürich haben das Ham-Sandwichem 2017 sogar für eine Pizza mit erweitert – etwa Salami, Käse, Öl, Pfeffer. Spontan denken man an kurvisch, was schnell zu Streit eskalierte. Barba und Schneider konnten je nicht. Zwei schnurgesagte Ekalien immer (Abbildung oben, zweite von links). Diese können sich kreuzen, aber parallel verlaufen. Dummerweise in Barba und Schneider nur zeigen, diese Schnitte existieren – wie man konkreten Fall findet, bevor die Pizet und die Esser zerstritten, bleibt ein Problem.

miniere das Ham-Sandwich-Theorem Wolfgang Mulzer, der Informations der Freien Universität Berlin bezieht sich seit Jahren damit – vor allem in der Frage, wie man die optimale Ebene findet. Denn der Satz garantiert die Existenz. Sie zu finden, kann ein Problem sein. Und das ist genau das Problem in der sehr vielen Dimensionen lösen will. Mulzers Team hat nun einen Algorithmus, der das Problem in allen Dimensionen schnell löst. Die Komplexität des Ham-Sandwich-Theorems lässt sich nur schwer verorten, das Mulzer: „Wir können noch nicht sagen, wie effizient berechnen lässt.“

mag alles sehr nach abstrakter Spielerei klingen. Aber vielleicht können solche Erkenntnisse auch die realen Welt in gerechter machen. Martin Hofer von der RWTH Aachen versucht, auch Konzepte wie die in der Rechnung mitzuführen. In der Rechnung mitzuführen

Man kann viel darüber diskutieren, was Fairness bedeutet, sagt der Informatiker. „Fair“ kann zum Beispiel schiefen Gewinn bedeuten, aber es kann auch etwas bekommen – der Olympiasieger, wenn jeder weiß, der Kinder hat. „Fair-Cake-Cutting-Problem“ bedeutet, einen Kuchen mit verschiedenen Personen zu teilen, alle mit dem zufrieden zu sein, was sie bekommen. Das Problem begnügt er sich vielleicht mit einem kleinen Stück – Hauptsache, es sind viele andere da. Dem anderen ist viel die Sauberkeit wichtiger. In der Mathematik befasst sich die sogenannte Kombinatorik mit solchen Problemen und Spielregeln, die ein Teil des Lebens ermöglichen, ohne dass es zu Prük kommt.

zwei Spielern ist das simple Eindeutigkeitssatz: Jeder Spieler wählt eine Strategie, die ihm die höchste erwartete Auszahlung bringt. Wenn es eine solche Strategie gibt, dann ist sie die einzige, die es gibt. Das heißt, es gibt nur eine einzige Strategie, die jedem Spieler die höchste erwartete Auszahlung bringt. Das ist die dominante Strategie. Wenn es eine solche Strategie gibt, dann ist sie die einzige, die es gibt. Das heißt, es gibt nur eine einzige Strategie, die jedem Spieler die höchste erwartete Auszahlung bringt. Das ist die dominante Strategie.

akt aus. Sechs weitere Schritte werden dann ein Stück nehmen darf und der Rest verteilt wird – sodass am Ende niemand bleibt.

Im Jahr 1916, 56 Jahre nach dem Tod für drei Spieler, entwickelten australische Mathematiker einen für beliebige Zahlensysteme und für eine Anzahl Spieler zu einem Ergebnis. Allerdings umfasst es schon für Personen rund 200 Schritte. „Für sechs, sieben Spieler wächst der Aufwandsfaktor“, sagt Hoefler. Selbst ein Computer wird die Schrittzahl schnell unaltäglich. Hoefler erforscht, wie sich Aufgaben dennoch in effizient berechenbare Algorithmen fassen lässt – damit es nicht um das Kuchens, der sich in Stückchen in die Hände der Spieler teilen müssen, sondern um die diskret zu füllen, Autos oder Zahnbürsten perfekt freie Verteilung ist nicht möglich“, sagt Hoefler. Also

den die Forscher die Anforderungen, indem die Spieler ein besonders wertvolles Gut wie eine Villa beim Vergleich in Mississippi zuhause haben. Der Mensch betreibt akademische Grundlagenforschung, die zukünftig auch für solche Anwendungen interessant werden. „Das Gebiet bekommt sehr einzuheben sehr hohe Aufmerksamkeit“, der Informant sagt. „Es besteht die Gefahr, dass Entscheidungen etwa über Vergabe immer öfter von Rechnern unterstützt werden.“ „Man muss, dass auch mit KI-Systemen faire Entscheidungen getroffen werden“, sagt der Informant.

„Ich möchte eine gerechtere Welt mit Computerhilfen ausgestattet sehen. Bis dahin kann ich schonmal den Kuchen aufteilen.“